UW Faculty of Management

Working Paper Series

No 7/ July 2019

The Simple Index Numbers: simple and discount growth rate

Analiza dynamiki zjawisk: stopa wzrostu prosta i handlowa

Mariusz Szałański
Faculty of Management, University of Warsaw, Poland
ORCID 0000-0001-7062-1919

Słowa kluczowe: analiza dynamiki zjawisk, indeks prosty, stopa wzrostu, The Index Numbers

UW FM Working Paper Series are written by researchers employed at the Faculty of Management of UW and by other economists, and are published by the Faculty.

DISCLAIMER: An objective of the series is to get the research results out quickly, even if their presentations are not fully polished. The findings, interpretations, and conclusions expressed in this Working Paper are those of their author(s) and do not necessarily the views of the Faculty of Management of UW.

Publisher: University of Warsaw, Faculty of Management Press

Address:

Str.: Szturmowa 1/3; 02-678 Warsaw, Poland

Telephone: +48 22 55 34 164

Fax: +48 22 55 34 001

This paper can be downloaded without charge from:
http://www.wz.uw.edu.pl/portale/Faculty%20of%20Management%20Working%20Paper%20Series/dzial/view-working-papers

Information on all of the papers published in the UW Faculty of Management Working Paper Series can be found on Faculty of Management Website at:
http://www.wz.uw.edu.pl/portale/Faculty%20of%20Management%20Working%20Paper%20Series

ISSN 2300-4371 (ONLINE)

The Simple Index Numbers: simple and discount growth rate

Analiza dynamiki zjawisk: stopa wzrostu prosta i handlowa

Mariusz Szałański
Faculty of Management, University of Warsaw, Poland
ORCID 0000-0001-7062-1919

Abstrakt

Analiza dynamiki zjawisk opisuje teorię indeksów (wskaźników) oraz przyrostów względnych i absolutnych. Korzystając z dorobku matematyki finansowej postaram się wykazać w artykule, że możliwe jest rozszerzenie analizy przyrostów względnych o podział na dwie miary: przyrost względny (stopę wzrostu) prosty i dyskontowy (handlowy).
Powyższe rozróżnienie stóp jest znane i powszechnie wykorzystywane w arytmetyce gospodarczej lub matematyce finansowej. Polega na naliczaniu stopy procentowej od wartości zmiennej początkowej (bazowej) lub końcowej (badanej). Opisano proste zastosowania nowej miary na przykładach ekonomicznych oraz pokazano jej zastosowania na rynkach finansowych. Artykuł może być przyczynkiem do rozszerzenia zagadnień znanych w matematyce finansowej na statystykę.

Abstract

Analysis of the dynamics of phenomena describes the theory of indexes (indicators) as well as relative and absolute increments. Using the achievements of financial mathematics, I will try to show in the article that it is possible to extend the analysis of relative increments by dividing them into two measures: a relative increase (growth rate), simple and discount (trade).
The above-mentioned difference in rates is known and commonly used in economic arithmetic or financial mathematics, it consists in calculating the interest rate on the value of the initial (base) variable or final (test) variable. Simple applications of the new measure on economic examples are described and its applications on the financial markets are shown. The article may be a contribution to extending the issues known in financial mathematics to statistics.

Słowa kluczowe: analiza dynamiki zjawisk, indeks prosty, stopa wzrostu, The Index Numbers

Spis treści

1. Wstęp

Analiza dynamiki zjawisk opisuje teorię indeksów (wskaźników) oraz przyrostów względnych i absolutnych. Korzystając z dorobku matematyki finansowej postaram się wykazać w artykule, że możliwe jest rozszerzenie teorii przyrostów względnych o podział na dwie miary: przyrost względny (stopę wzrostu) prosty i dyskontowy (handlowy). Powyższe rozróżnienie stóp jest znane i powszechnie wykorzystywane w arytmetyce gospodarczej lub matematyce finansowej[1]. Polega na naliczaniu stopy procentowej od wartości zmiennej początkowej (bazowej) lub końcowej (badanej). W artykule zamiast określenia przyrost względny będę używać wymiennie określenia stopa (tempo) wzrostu.

Opis wzrostu (zmiany) wartości jest bardzo ważny w zastosowaniach ekonomicznych i finansowych. Analiza miar dynamiki, jako narzędzie statystyczne, znajduje zastosowanie przede wszystkim ekonomiczne, opisując wzrost wartości dowolnej zmiennej w szeregach czasowych. Na rynkach finansowych używa się funkcji finansowych (opisanych w podrozdziale 3). Dlatego w artykule zamierzam wykazać, że zasada naliczania procentowego od wartości początkowej (bazowej) lub od wartości końcowej (badanej), znana z matematyki finansowej, może zostać użyta do modyfikacji konstrukcji miar dynamiki.

Problem z rozróżnieniem stopy wzrostu prostej i dyskontowej można wytłumaczyć na prostym przykładzie. Jeśli wartość początkową 100 jednostek podniesiemy o 20%, uzyskamy 120 jednostek. Jeśli chcielibyśmy wrócić do wartości początkowej poprzez pomnożenie 120 jednostek razy 20%, uzyskamy 24 jednostki. Odejmując od 120 otrzymane 24 jednostki, mamy 96 jednostek wartości początkowej, a to nie jest równe wyjściowym 100 jednostkom. Błąd polega w tym przypadku na zastosowaniu dwóch różnych miar, opartych na różnym sposobie procentowego naliczania zmiany wartości. Najpierw, bowiem policzyliśmy stopę procentową od wartości początkowej (stopę wzrostu prostą), a następnie od wartości końcowej (stopę wzrostu dyskontową).

[1] Szałański M. , Matematyka finansowa, Toruńska Szkoła Zarządzania, 2001

Przegląd literatury statystycznej wskazuje, iż w metodach analizy dynamiki zjawisk opisywana jest następująca tematyka: rodzaje szeregów czasowych, proste metody badania szeregu czasowego oraz indeksy indywidualne i zespołowe (zagregowane)[2].

Zależności ekonomiczne to związek między dwoma zmiennymi Y i X, co zapisać możemy, jako Y(X). Jeżeli zmienną X jest czas to mamy szereg czasowy, czyli Y(t)[3]. Specyficznym typem szeregu czasowego jest, nazwijmy go quasi szereg czasowy Y_t. W tym szeregu czasowym czas jest niejako ukryty, liczy się zmiana wartości Y_t a nie dokładnie, kiedy to nastąpiło. Przykładem ekonomicznym niech będzie zmiana ceny towaru po opuszczeniu fabryki, aż do osiągnięcia ceny końcowej w sklepie. W literaturze przedmiotu, miary dynamiki dzielimy najczęściej na proste: przyrosty absolutne i względne, wskaźniki dynamiki (indeksy) oraz miary średniego wzrostu. Drugi typ miar, nieuwzględniony w opracowaniu to indeksy zespołowe. Metody analizy dynamiki zjawisk są generalnie dobrze opisane w literaturze statystycznej i różnice, wynikac mogą tylko z różnego typu sposobów klasyfikacji, np. ze względu na zastosowanie. Dlatego ważnym wydaje się zaproponowanie w tym artykule modyfikacji przyrostu względnego - stopy wzrostu.

W ostatnich latach bardzo zyskała na znaczeniu teoria złożoności, która pokazuje, że są dziedziny[4] w naukach społecznych, biologicznych, fizycznych czy matematycznych, które redukują się do kilku prostych zasad (reguł). Dlatego celem pośrednim artykułu jest pokazanie, że dychotomiczny podział stóp (temp) wzrostu jest powszechnie stosowaną zasadą w praktyce gospodarczej czy finansowej i ma też zastosowanie w statystyce.

Artykuł ma na celu udowodnienie, iż zasada naliczania procentowego od wartości początkowej lub od wartości końcowej jest zasadą łączącą matematykę finansową i analizę dynamiki zjawisk, w działach matematyki zajmujących się opisem zmiany wartości w szeregach czasowych. Ma pokazać, iż do miar analizy dynamiki zjawisk dołożyć można jeszcze jedną miarę – przyrost względny dyskontowy, czyli stopę (tempo) wzrostu dyskontowe[5]. Opisano zastosowania nowej miary na hipotetycznych przykładach ekonomicznych oraz pokazano jej zastosowania na rynkach finansowych. Artykuł może być przyczynkiem do rozszerzenia zagadnień znanych w matematyce finansowej na statystykę.

---

[2] Sobczyk M., Statystyka, PWN, wyd IV, 2002, s.307 , Jóźwiak J, Podgórski J., Staytstyka od podstaw, PWE, 1997, s.489, Aczel A. , Statystyka w zarządzaniu, PWN, 2000, s.653, Puławska-Turyna B. , Satystyka dla ekonomistów, Difin,2011

[3] Przyjmiemy w domyśle stałe odstępy czasu. Ważnym założeniem dla szeregów czasowych, którego nie będziemy tutaj rozstrzygać, jest rozróżnienie na szeregi czasowe momentów (dla zasobów zmiennej w danym konkretnym czasie) oraz szeregi czasowe okresów (dla strumieni, czyli wielkości zmiennej za dany okres – między wybranymi momentami).

[4] Np. algorytmy komórkowe w naukach społecznych czy fraktale w biologii.

[5] Należy dokonać tutaj pewnego zastrzeżenia. Otóż pojęcie stopy dyskontowej, powszechnie wykorzystywane w np. finansach przedsiębiorstw, dotyczy przekształconej postaci procentu prostego lub składanego, w celu obliczenia K_0. Niestety w literaturze i praktyce gospodarczej stopa procentowa naliczana od K_n też nosi nazwę dyskontowania. W artykule opisujemy oczywiście ten drugi przypadek.

2. Propozycje modyfikacji stóp (temp) wzrostu

Opis propozycji nowej klasyfikacji stóp (temp) wzrostu rozpocznę od zdefiniowania pojęć używanych w tym artykule.

„**Miernik** to kategoria ekonomiczna dająca się policzyć (poddaje się kwantyfikacji) i wyrazić liczbą. To kategoria ekonomiczna ujmująca ilościowo część (fragment) rzeczywistości”[6].

Do wyrażenia ruchu (zmiany) miernika używamy **miar** absolutnych lub względnych. Są to przyrosty absolutne i względne oraz wskaźniki (indeksy) proste i złożone.

„**Różnice absolutne (bezwzględne),** zwane także przyrostami absolutnymi, mierzą, o ile między okresami (momentami) badanym a podstawowym powiększyła się zmienna (cecha) zależna. Są nieporównywalne dla różnych cech.

Porównywalność zapewnia się, odnosząc przyrost (różnicę) absolutną do wartości liczbowej zmiennej zależnej w okresie (momencie) podstawowym. Takie konstrukcje zwie się przyrostami **stosunkowymi (względnymi)** lub niekiedy współczynnikami tempa, a najczęściej tempem (stopą) wzrostu. **Tempo wzrostu** określa, jak szybko, w jakim tempie zmienia się cecha zależna. **Wskaźnik (indeks)** wyraża natomiast -krotność zmiennej zależnej w okresie (momencie), badanym w odniesieniu do okresu (momentu) podstawowego.”[7]

Miary dynamiki, czyli klasyfikację indeksów (wskaźników) i przyrostów można przedstawić następująco[8]:

Tabela 1 Klasyczny podział miar dynamiki

Przyrosty	absolutne
	względny (stopa)
Indeksy (wskaźniki)	proste (I)
	złożone

Tabela 2 Propozycja poszerzenia miar dynamiki o stopę prostą i dyskontową

Przyrosty	absolutne	
	względne (stopy)	stopa prosta (p)
		Stopa dyskontowa (d)
Indeksy (wskaźniki)	proste (I)	
	Złożone	

Propozycja modyfikacji dotyczy wydzielenia kategorii miar przyrostów względnych nowej stopy dyskontowej (d), przy czym indeksy (wskaźniki) pozostają niezmienne.

---

[6] I.Timofiejuk, Mierniki a wskaźniki statystyczne (indeksy), Wiadomości statystyczne, 4.2002, s .2

[7] Op.cit, str. 3

[8] Każda z przedstawionych miar w tabeli 1 i 2 ma swój wymiar łańcuchowy lub jednopodstawowy

Zależność między indeksem prostym (I) a propozycją zmodyfikowanych stóp wzrostu przedstawiają wzory (bez podziału na łańcuchowe i jednopodstawowe).

Wzór na **indeks (I_t) oraz stopę (tempo) wzrostu prostą (p_t).**

Obliczenie wartości badanej (Y_t)

$$Y_t = Y_0(1+p_t) \quad (1) \qquad \text{lub} \qquad Y_t = Y_0 \cdot I_t \quad (2)$$

Powrót do wartości bazowej (Y_0)

$$Y_0 = \frac{Y_t}{(1+p_t)} = \frac{Y_t}{I_t} \quad (3)$$

Z powyższych wzorów wyprowadźmy pozostałe zmienne (I) oraz (p).

Ze wzoru (3) mamy indeks prosty
$$I_t = \frac{Y_t}{Y_0} \quad (4)$$

Ze wzoru (1) mamy wzór na stopę (tempo) wzrostu prostą

$$p_t = \frac{Y_t}{Y_0} - 1 = \frac{Y_t - Y_0}{Y_0} = \frac{\Delta Y}{Y_0} \quad (5)$$

W przyroście dyskontowym wykorzystującym **stopę (tempo) dyskontowe (d)** wyprowadzenie wzorów rozpoczynamy od sposobu liczenia wartości bazowej (Y_0) – obliczania procentowego, naliczanego od wartości badanej Y_t.

$$Y_0 = Y_t - Y_t \cdot d_t = Y_t(1-d_t) \quad (6)$$

Stąd wyprowadzamy wzór na badaną wartość zmiennej (Y_t)

$$Y_t = \frac{Y_0}{(1-d_t)} = Y_0 \frac{1}{(1-d_t)} \quad (7)$$

Z wzoru (6) wyprowadźmy wzór na stopę dyskontowa (d)

$$Y_0 = Y_t(1-d_t), \quad \frac{Y_0}{Y_t} = 1 - d_t, \quad \frac{Y_0}{Y_t} - 1 = -d_t, \quad \frac{Y_0 - Y_t}{Y_t} = -d_t, \quad \frac{-(Y_t - Y_0)}{Y_t} = -d_t$$

stąd
$$d_t = \frac{Y_t - Y_0}{Y_t} = \frac{\Delta Y}{Y_t} \quad (8)$$

Przyrost wartości z wykorzystaniem stopy dyskontowej (d) wyrazimy przy pomocy indeksu (I).

Ze wzoru (7) otrzymujemy

$Y_t = Y_0 \dfrac{1}{(1-d_t)} = Y_0 \cdot I_t$, stąd $I_t = \dfrac{1}{(1-d_t)}$ (9).

Wzrost (zmianę) wartości możemy opisać przyrostem absolutnym lub wartością indeksu prostego (I). Mamy dwa sposoby opisu zmiany wartości (wzrostu lub spadku) – przyrost prosty lub dyskontowy – z wykorzystaniem stopy prostej (p) lub stopy dyskontowej (d). Oba przyrosty dotyczą tego samego wzrostu absolutnego zmiennej , opisanego indeksem (I)

$$I_t = (1 + p_t) = \frac{1}{1-d_t} \tag{10}$$

Należy podkreślić, że zaprezentowane powyżej wzory stosować można zarówno dla miar jednopodstawowych, jak i łańcuchowych.

Modyfikacja klasyfikacji miar dynamiki przy użyciu stopy wzrostu prostej i dyskontowej (handlowej) daje możliwość opisu zmiany wartości zmiennej w szeregu w dwojaki sposób. Rodzi się pytanie: czy możliwe jest przeliczanie miedzy stopami (tempami) wzrostu prostą i dyskontową? Odpowiedź brzmi: tak. W matematyce finansowej zagadnienie to nosi nazwę stopy odpowiedniej.

Wychodząc z równoważności (10)

$$(1 + p_t) = \frac{1}{(1-d_t)}$$

wyprowadzamy zmienne z ostatniego równania :

$$p_t = \frac{d_t}{1-d_t} \quad (11) \qquad \text{oraz} \qquad d_t = \frac{p_t}{1+p_t} \quad (12)$$

Wzór (11) i (12) to możliwość policzenia stopy prostej w sytuacji kiedy dysponuje się stopą dyskontową i odwrotnie.

Wróćmy do naszego przykładu ze wstępu do artykułu, dotyczącego wzrostu i zmniejszenia wartości o 20%.

Przyjmijmy stopę (tempo) wzrostu prostą i = 0,2 (20%) i obliczmy stopę dyskontową.

$$d = \frac{p}{1+p} = \frac{0,2}{1+0,2} = 0,1667 \ (16,67\%)$$

Zwiększamy wartość zmiennej Y_0 = 100 jednostek przy pomocy stopy prostej

$$Y_t = 100(1 + 0,2) = 120 .$$

Teraz możemy obliczyć wartość wyjściową (bazową) przy pomocy stopy odpowiedniej dyskontowej.

$$Y_0 = 120(1 - 0,1667) = 100 .$$

Stopy (tempa) wzrostu nie mają kierunku zmiany wartości. Są takie same dla wzrostu z poziomu zmiennej z Y_0 do Y_t i odwrotnie z Y_t do Y_0 . Przyrosty absolutne też nie mają kierunku, zawsze są takie same. W przypadku indeksów (I) kierunek obliczeń nie ma znaczenia. Jak wynika z tabeli 3 i 4 wyrażony względnie wzrost dla pojedynczych wartości opisuje I_t, natomiast powrót do wartości bazowej opisuje zależność $\frac{1}{I_t}$. To jest ta sama wartość indeksu, tylko przekształcona.

3. Stopy prosta i dyskontowa – zastosowanie w praktyce finansowej i gospodarczej

Zasada liczenia stopy procentowej od kapitału początkowego (K_0) - „z dołu" lub od kapitału końcowego (K_n) jest powszechnie wykorzystywane w arytmetyce gospodarczej[9]. Jest także podstawą konstrukcji czterech głównych funkcji finansowych.

Przedstawmy na schemacie podstawowe funkcje finansowe, używając oznaczeń przyjętych w matematyce finansowej

Schemat 1

Stopa prosta	$K_n = K_0(1+i)$ →	Procent prosty	$K_n = K_0\left(1+i\cdot\frac{t}{360}\right)$
	↘	Procent składany	$K_n = K_0(1+i)^n$
Stopa dyskontowa	$K_n = \frac{K_0}{(1-d)}$ →	Dyskonto handlowe	$K_n = \frac{K_0}{\left(1-d\cdot\frac{t}{360}\right)}$
	↘	Procent składany	$K_n = \frac{K_0}{(1-d)^n}$
		kapitalizacja z góry	

Opracowanie własne na podstawie: M.Szałański, Matematyka finansowa, Toruńska Szkoła Zarządzania, 2001

Uważny obserwator zauważy, że funkcje różnią się między sobą sposobem dopisania czynnika czasu, który może być dopisany w sposób liniowy lub nieliniowy.

Ważnym zastosowaniem stopy (tempa) wzrostu prostego i dyskontowego jest narzut i marża. Pojęcia te są bardzo często mylone i uważane za tożsame. Rzeczywiście narzut i marża w sensie bezwzględnym, w jednostkach pieniężnych, są takie same. Różnią się sposobem procentowego liczenia. Narzut to stopa prosta liczona procentowo od wartości początkowej (Y_0), marża liczona jest procentowo od wartości końcowej (Y_n). W literaturze przedmiotu używa się pojęcia „od sta" dla narzutu handlowego lub „w stu" dla marży handlowej. Przykładem liczenia narzutu jest podatek VAT, narzut zysku w przedsiębiorstwie,

[9] Podgórska M., Klimkowska J., Matematyka finansowa, PWN, 2005, Sobczyk M., Matematyka finansowa, Placet, 1995, Kellison , The teory of interest rate, IRWIN,

Przykładem liczenia marży (z góry) jest podatek obrotowy, ale też wszystkie obniżki i przeceny.

Innym przykładem zastosowania stopy prostej i dyskontowej są obliczenia procentowe. Narzut handlowy, liczony jako stopa prosta, opiera się na zasadzie powiększonej, czyli powiększeniu zasady procentowej o sumę procentową wyliczaną ze wskaźnika procentowego. Marża handlowa, liczona jako stopa dyskontowa, opiera się na zasadzie zmniejszonej i polega na obniżeniu wartości o sumę procentową wyliczoną ze wskaźnika procentowego. Odwrócona zasada procentowa pozwala na wyliczenie pozostałych zmiennych – sumy procentowej i wskaźnika procentowego.

Kolejnym przykładem praktycznego zastosowania dyskontowej stopy wzrostu są rabat i skonto. W sensie praktycznym oblicza się je tak samo, jako procent liczony od kwoty brutto. Jednak w sensie finansowym są to dwa różne zagadnienia, zastosowanie dwóch różnych wzorów. Rabat to obniżenie ceny związane z ilością zakupionego towaru i stosujemy tutaj wzór (6). Natomiast skonto to rezygnacja z odsetek kredytu kupieckiego, więc pojawia się tu czynnik czasu i stopa dyskontowa. Na schemacie 1 odpowiada temu funkcja dyskonta handlowego.

4. Podsumowanie i wnioski

W artykule starałem się wykazać, że analiza miar dynamiki (teorię indeksów) można wzbogacić o nowy podział w przyroście względnym: na stopę wzrostu prostą i dyskontową. Pokazanie różnorodnych zastosowań wskazuje, iż zasada ta leży u podstaw obliczania zmiany wartości zmiennej w dowolnych zastosowaniach. Na gruncie statystki jest to nowe podejście, natomiast na gruncie praktyki gospodarczej czy finansowej naliczanie procentowe od kwoty netto (z dołu) – stopa prosta i naliczanie procentowe od kwoty brutto (z góry) – stopa dyskontowa są powszechnie stosowane.

Symetryczność stóp wzrostu można nieco żartobliwie opisać następująco. To jest jak z odbiciem w lustrze. Jeśli podejdziemy do lustra i podniesiemy rękę (odpowiednik indeksu wzrostu), to jeżeli podniesiemy prawą rękę, to nasze odbicie lustrze podniesie lewą rękę (odpowiednik stopy wzrostu prostej i dyskontowej)

5. Literatura

1. Aczel A. , Statystyka w zarządzaniu, PWN, 2000
2. Jóźwiak J, Podgórski J., Staytstyka od podstaw, PWE, 1997,
3. Kellison , The teory of interest rate, IRWIN,
4. Podgórska M., Klimkowska J., Matematyka finansowa, PWN, 2005,
5. Puławska-Turyna B. , Satystytyka dla ekonomistów, Difin, 2011
6. Sobczyk M., Matematyka finansowa, Placet, 1995,

7. Sobczyk M., Statystyka, PWN, wyd IV, 2002
8. Szałański M. , Matematyka finansowa, Toruńska Szkoła Zarządzania, 2001
9. Timofiejuk I., Mierniki a wskaźniki statystyczne(indeksy, Wiadomości statystyczne, 4.2002